УДК 511.176

ОСОБЛИВІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ЧИСЛА СТІРЛІНГА, БЕЛЛА, ФІБОНАЧЧІ

Реуцька Є.В.,студентка 1 курсу
Економічного факультету
Бобрицька Г.С.,к.п.н,доцент
кафедри вищої математики
Харківський навчально-науковий інститут
ДВНЗ УБС

Числова послідовність – це послідовність чисел, тобто відображення, яке кожному натуральному числу nставить у відповідність дійсне число x_n. Число x_n називають елементом або членом послідовності.

Щоб задати послідовність, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який його член:

1.Послідовність можна задати описом знаходження її членів.

2.Скінченну послідовність можна задати переліком її членів.

3.Послідовність можна задати таблицею, у якій навпроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер.

4.Послідовність можна задати формулою, за якою можна знайти будь-який член послідовності, знаючи його номер.

5.Спочатку вказати перший або кілька перших членів послідовності, а потім — умову, за якою можна визначити будь-який член послідовності за попереднім. Такий спосіб задання послідовності називають рекурентним.

Числа Фібоначчі чи Послідовності Фібоначчі – числова послідовність, що має ряд властивостей. Наприклад, сума двох сусідніх чисел послідовності дає значення наступного за ними (наприклад, 1+1=2; 2+3=5 і т.д.), що підтверджує існування коефіцієнтів Фібоначчі, тобто постійних співвідношень.

Таку числову послідовність Леонардо Пізанський (справжнє ім'я математика) виклав в його праці «LiberAbaci» (1202). В ній він розглянув розвиток ідеальної популяції кроликів, що біологічно є нереальною. Вчений зробив висновок, що в кінці кожного *n*-го місяця кількість пар кроликів буде дорівнювати кількості пар в минулому місяці плюс кількість новонароджених пар, яких буде стільки ж, скільки пар було два місяці назад. Таким чином: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Послідовність Фібоначчі починається так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…

Властивості послідовностей Фібоначчі

1. Відношення кожного числа до його наступного наближається до 0.618 при збільшенні його порядкового номера. Відношення ж кожного числа до попереднього прямує до 1.618 (оберненому до 0.618).

2. При діленні кожного числа на позанаступне за ним виходить число 0.382; навпаки – відповідно 2.618.

3. Підбираючи таким чином співвідношення, отримуємо основний набір коефіцієнтівФібоначчі : 4.235, 2.618, 1.618, 0.618, 0.382, 0.236

4. Сума кожного третього члена послідовності дорівнює половині різниці останнього члена збільшеного на 2 та одиниці.

Доводяться властивості чисел Фібоначчі за допомогою математичної індукції. Наведемо приклад доведення четвертої властивості.

$$\mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_6 + \cdots + \mathrm{F}_{3\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{F}_{3\mathrm{n}+2} - 1}{2}$$

Скористаємось методом математичної індукції. Легко перевірити, що для n = 1 рівність виконується. Припустимо, що твердження виконується при n = k:

$$\mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_6 + \cdots + \mathrm{F}_{3\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{F}_{3\mathrm{k}+2} - 1}{2}$$

Покажемо, що воно виконується і при n=k + 1. Для цього замість n у формулу підставимо k + 1 і врахуємо вищезазначене припущення:

$$F_3 + F_6 + \cdots + F_{3k} + F_{3(k+1)} = \frac{F_{3k+2} - 1}{2} + F_{3k+3} =$$

$$\frac{F_{3k+4} + F_{3k+3} - 1}{2} = \frac{F_{3(k+1)+2} - 1}{2}$$

Зв'язок послідовності Фібоначчі та «золотого перетину»

Послідовність Фібоначчі прямує до деякого постійного співвідношення. Проте, це співвідношення ірраціональне, тобто представляє собою число з нескінченою, непередбаченою послідовністю десяткових чисел в дробовій частині. Його неможливо виразити точно.

Якщо будь-який член послідовності Фібоначчі поділити на йому попередній (наприклад, 13:8), результатом буде величина, що коливається близько до ірраціонального значення 1.61803398875… та через раз то переважаюча, то та, що не досягає його. Таке співвідношення Кеплер назвав одним зі «скарбів геометрії». Ірраціональне число 1.61803398875…називають «золотим перетином» та позначають грецькою літерою φ.

Числа Стірлінга першого та другого роду

В комбінаториці числа Стірлінга другого роду з n по k, що позначаються $S(n,k)$ або $\left\{ {n \atop k} \right\}$, називається кількість невпорядкованих розбиттів *n*-елементних множин на *k* непорожніх підмножин.

Числа Стірлінга другого роду задовольняє рекурентне співвідношення:

$S(n,n) = 1$, для n ≥ 0,

$S(n,0) = 0$, для n > 0,

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ для $0 < k < n$.

Загальна формула:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n.$$

Числа Стірлінга другого порядку (без знаку) – кількість перестановок порядку *n* з *k*циклами.

Числа Стірлінга першого порядку (зі знаком) s(n,k) називаються коефіцієнти многочлена:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k,$$

де $(x)_n$ – символ Похгаммера (регресний факторіал):

$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$

Числа Стірлінга першого роду задаються рекурентним співвідношенням:

$s(n,n) = 1$, для n ≥ 0,

$s(n,0) = 0$, для n > 0,

$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1) \cdot s(n-1,k)$ для $0 < k < n$.

Приклад. Розглянемо числа Стірлінга першого роду для $(\mathrm{x})_2$. Для цього потрібно представити символ Похгаммера у вигляді многочлена:

$$(\mathrm{x})_2 = x(x-1) = -x + x^2.$$

Числа Стірлінга першого порядку – це коефіцієнти многочлена, тому *s(2,0) = 0, s(2,1) = –1, s(2,2) = 1.*

1.2 Дано множину S з 6 елементів. Розбити її на 2 непорожні множини. Число невпорядковани х розбиттів 6 - злементної множини на два блоки , один з яких містить 1 елемент , дорівнює 6. Якщо в одному з двох блоків 2 елемента , то число відповідних разбиттів дорівнює 15. Таким чином, якщо обидва блоки , на які розбивається вихідна множина , 3 - елементні , то число таких разбиттів 10. Очевидно, що при будь натуральному *n*, S (*n* , 1) = 1 , S (*n* ,*n*) = 1.

Числа Белла

В комбінаториці числом Белла B_n називається число всіх неупорядкованих розбиттів n–елементних множин, при цьому за визначенням вважають $B_0 = 1$.

Значення чисел Белла B_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$ утворюють наступну послідовність: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, …

Приклад. Нехай X = {1,2,3}. Тоді $X_{3,1}$ = 1, бо є лише одне розбиття на одну множину – сама множина. Розбиттів на дві множини є три:

$$X = \{1,2\} \cup \{3\},\ X = \{1,3\} \cup \{2\},\ X = \{2,3\} \cup \{1\},$$

тому, $T_{3,2}$ = 3. Є одне розбиття на три множини: $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, тому $T_{3,3} = 1$.

За допомогою числа Белла також можна обчислити суму чисел Стірлінга другого роду:

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)$$

Числа Белла можна задавати в рекурентному виді:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Список використаної літератури:

1. Популярний ознайомчо-оглядовий Web-сайт про особливі числа для школярів
https://sites.google.com/site/losevaelena260190/cisla-fibonacci-i-zolotoe-secenie-v-prirode-nauke-i-iskusstve

2. Інформаційний науково-популярний сайт про числа Стірлінга першого та другого роду
https://sites.google.com/site/losevaelena260190/cisla-stirlinga-pervogo-i-vtorogo-roda

3. Інтернет енциклопедія про числові послідовності та числа Белла
https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Белла
https://ru.wikipedia.org/wiki/Числова_послідовність

4. Навчально-методичний посібник з дискретної математики
Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – С. 67-78

5. Конспект лекцій з дискретної математики Єльського університету
L. Lovasz – J. Pelik ´ an – K. Vesztergombi: Kombinatorika ´
(Tank¨onyvkiad´o, Budapest, 1972); (p.45-46.)