УДК 511.176

РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Згонник Вадим Віталійович
Науковий керівник доц. Вишневецький О.Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Якщо існує натуральне число k і числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ такі, що, починаючи з деякого номера n, члени послідовності $\{u_n\} = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ задовольняють умові

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \qquad (n \geq m \geq 1), \tag{1}$$

то послідовність називається *рекурентною послідовністю порядку k*, а співвідношення (1) – *рекурентним рівнянням порядку k*.

Приклади. 1. Геометрична прогресія. Для неї $u_1 = a$, $u_2 = aq$, $u_3=q^2, \dots$, $u_n = aq^{n-1}, \dots$, рівняння (1) приймає вид: $u_{n+1} = qu_n$.

2. Арифметична прогресія. Тут $u_1 = a$, $u_2 = a + d, \dots$, $u_n = a + (n - 1)d, \dots$,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

- рівняння виду (1), де $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Отже, арифметична прогресія є рекурентною послідовністю другого порядку.

3. У стародавній задачі Фібоначчі про число кроликів треба знайти число пар зрілих кроликів, що утворилися від однієї пари, якщо відомо, що кожна зріла пари кроликів щомісяця народжує нову пару, причому немовлята досягають полової зрілості протягом місяця. Через n + 1 місяців загальне число зрілих пар буде $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Одержана послідовність

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, \dots \tag{2}$$

називається *послідовністю Фібоначчі*, а її члени – *числами Фібоначчі*.

Можна довести, що довільна рекурентна послідовність порядку k, що задовольняє рівнянню виду (1), збігається з послідовністю коефіцієнтів частки, отриманої від ділення деякого многочлена P (x) на многочлен $Q(x) = 1 - a_1x - \dots - a_kx^k$. Наприклад, члени послідовності Фібоначчі (2) задовольняють рівнянню $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $(n \geq l)$, тут $m = 1$, $k = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ і $Q(x) = 1 - x - x^2$, а многочлен P(x)=1. Отже, числа Фібоначчі збігаються з послідовністю коефіцієнтів частки від ділення 1 на $1 - x - x^2$.

Одне з питань, що доводиться розв'язувати щодо послідовностей, полягає у відшуканні формули суми n членів кожних з цих послідовностей. Нехай

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots, \tag{3}$$

- рекурентна послідовність порядку k, члени якої задовольняють рівнянню (1).

Розглянемо нову послідовність, утворену сумами S_n чисел (3):

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots, \tag{4}$$

Можна довести, що ця послідовність сум є також рекурентною, порядку k + 1, причому її члени задовольняють рекурентному рівнянню:

$$S_{n+1+k} = (1 + a_1) S_{n+k} + (a_2 - a_1) S_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1}) S_{n+1} - a_k S_n \tag{5}$$

Приклади:

a) Геометрична прогресія. Тут $u_n = aq^{n-1}$ і $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$. Оскільки члени $\{u_n\}$ задовольняють рівнянню виду $u_{n+1} = q\, u_n$, то члени $\{S_n\}$ повинні задовольняти рівнянню $S_{n+1} = (1 + q)\, S_{n+1} - q\, S_n$.

b) Послідовність квадратів натуральних чисел.

Тут $u_n = n^2$ і $S_n = 1 + 2^2 + \ldots + n^2$. Оскільки члени $\{u_n\}$ задовольняють рівнянню $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$, то члени $\{S_n\}$ задовольняють рівнянню

$$S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6u_{n+2} + 4S_{n+1} - S_n .$$

c) Числа Фібоначчі. Оскільки вони задовольняють рівнянню $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, то їх суми S_n повинні задовольняти рівнянню $S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n$.

Покажемо, що можна знайти базис розв'язків рекурентного рівняння (1), що складається з k геометричних прогресій з різними знаменниками. З'ясуємо, при яких умовах деяка геометрична прогресія $x_1 = 1$, $x_2 = q, \ldots, x_n = q^{n-1}, \ldots$ задовольняє рівнянню (1). Зауважуючи, що $x_{n+k} = q^{n+k-1}$, $x_{n+k-1} = q^{n+k-2}, \ldots, x_n = q^{n-1}$, і підставляючи ці величини в рівняння (1), одержимо:

$$q^{n+k-1} = a_1\, q^{n+k-2} + a_2\, q^{n+k-3} + \ldots + a_n\, q^{n-1},$$

звідки

$$q^k = a_1\, q^{k-1} + a_2\, q^{k-2} + \ldots + a_k \ldots \qquad (6)$$

Отже, геометрична прогресія задовольняє рекурентному рівнянню (1) порядку k тоді, коли знаменник q прогресії задовольняє алгебраїчному рівнянню (6) ступеня k з тими ж коефіцієнтами, як і у (1). Рівняння (6) називається *характеристичним* для рекурентного рівняння (1).

Таким чином, рекурентному рівнянню порядку k відповідає алгебраїчне рівняння ступеня k з тими ж коефіцієнтами - характеристичне рівняння. Кожний корінь характеристичного рівняння є знаменником геометричної прогресії, що задовольняє даному рекурентному рівнянню.

Тема «Рекурентні послідовності» не є ізольованою. В моделі економічних циклів Самуельсона-Хікса використовуються рекурентні рівняння другого порядку. Системи рекурентних рівнянь використовуються в динамічній моделі Леонтьєва розвитку економіки.

Список літератури

1. Грехем Р. Конкретная математика. Основы информатики. / Р. Грехем, Д. Батіг, О. Паташник. Пер. с англ. – М.:Мир, 1998. – С. 17−37.
2. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. Популярні лекції по математиці. - М.: Наука, 1950.
3. Мантуров О. В. Математика в поняттях, визначеннях і термінах. Ч.2 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федін; Під. ред. Л. В. Сабініна. - М.: Освіта, 1982. - С. 207-208.
4. П. В. Конюховский, А. С. Налетова. Построение моделей динамики выпуска продукции фирмы на основе линейных разностных уравнений второго порядка / Вестник Санкт-Петербургского университета, 2005. Сер.5. Вып.4